VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

М.П. Галанин, Е.Б. Савенков

Совместное использование метода конечных элементов и метода конечных суперэлементов

Ордена Ленина Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша

М.П. Галанин, Е.Б. Савенков

Совместное использование метода конечных элементов и метода конечных суперэлементов

Москва, 2004

Аннотация

В работе представлены результаты теоретического и численного исследования алгоритма, основанного на совместном использовании метода конечных элементов и метода конечных суперэлементов. Получены оценки ошибок для одного из вариантов метода для решения уравнения Лапласа. Рассмотрено применение метода для численного решения задачи о скоростном скин-слое.

M.P. Galanin, E.B. Savenkov

On combined finite element/finite superelement approximations

Abstract

In this paper we present some results on theoretical and numerical investigation of combined finite element/finite superelement approximations. Error estimates for one variant of this method for Laplace equation are presented. Some numerical results for velosity skin-layer problem are presented.

Содержание

1 Введение 3

2 Основные обозначения 12

3 Постановка задачи 12

4 Слабые постановки задачи 13

4.1 Формула Грина 13

4.2 Классическая слабая постановка 13

4.3 Специальная слабая постановка 14

5 Построение вариационного уравнения $b(u,v) = f(v)$ в пространстве следов 17

5.1 Операторы и их свойства 17

5.2 Построение вариационного уравнения I 19

5.3 Построение вариационного уравнения II 21

6 Построение конечномерной задачи 24

7 Оценки ошибок 26

8 Примеры расчетов 28

9 Заключение 32

В данной работе рассмотрено совместное использование метода конечных суперэлементов и обычного метода конечных элементов.

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) предложен в работах Р.П. Федоренко и его коллег ([1]-[4]) как средство численного решения задач, решение которых имеет локальные особенности, сосредоточенные в областях, диаметр которых существенно меньше диаметра исходной области, в которой решается задача. Теоретическому и численному исследованию МКСЭ посвящены работы ([5]-[7]), а также работы авторов ([8]-[11]).

В методе конечных суперэлементов расчетная область Ω разбивается на некоторое количество подобластей-суперэлементов Ω_k так, что $\Omega = \cup\Omega_k$. Далее, используя операторы Пуанкаре-Стелова, осуществляется переход от исходной задачи к задаче определения следов решения на границах суперэлементов Ω_k. Использование операторов Пуанкаре-Стеклова позволяет исключить из рассмотрения «внутренности» суперэлементов. После этого построенная задача для следов аппроксимируется тем или иным проекционно-сеточным методом.

В рассматриваемом комбинированном подходе в расчетной области так-же выделяется некоторое количество подобластей-суперэлементов, но они уже не покрывают всю расчетную область. В подобластях, занятых суперэлементами, так же, как и в предыдущем случае, осуществляется переход к рассмотрению следов решения на границах суперэлементов. В части области, не занятой суперэлементами, используется обычная аппроксимация метода конечных элементов.

Такой подход оказывается эффективным в случае, когда решение задачи имеет небольшое количество локальных особенностей и расчет решения вдали от них может проводиться обычными методами и на крупной сетке, шаг которой соизмерим с размером суперэлемента. Внутри суперэлементов, как и ранее, расчет проводится на мелкой сетке, позво-

В отличие от обычного метода конечных суперэлементов, в этом случае уже не требуется рассчитывать базисные функции суперэлементов в той части области, где решение гладкое.

Рассмотрим особенности подходов, используемых при исследовании и использовании обычного метода конечных элементов, метода конечных суперэлементов и комбинированного подхода.

Алгоритмически эти методы сходны, алгоритм построения конечномерной задачи может рассматриваться как формальное обобщение метода Галеркина. Во всех случаях приближенное решение ищется как линейная оболочка некоторой системы базисных функций. Конечномерная задача (система линейных алгебраических уравнений для амплитуд конечных элементов/суперэлементов) во всех случаях формально получается из условия ортогональности невязки приближенного решения некоторому конечномерному подпространству. При этом используется обычная слабая постановка решаемой задачи. Отличие состоит лишь в том, что в случае МКЭ базисные функции задаются (исходя из некоторых условий), а в случае МКСЭ (или комбинированного подхода) все (или некоторые) базисные функции рассчитываются как точные решения рассматриваемой задачи.

Несмотря на внешнее сходство, эти методы качественно различны с точки зрения их теории. Остановимся на этом подробнее.

Пусть решение задачи принадлежит некоторому пространству W, а приближенное решение ищется как элемент конечномерного пространства $W_h \subset W$. Пространство W_h является линейной оболочкой той или иной системы базисных функций.

В методе конечных элементов пространство W_h выбирается так, чтобы его элементы аппроксимировали произвольный элемент пространства W. Другими словами, требуется наличие оценки для ошибки наилучшего

$$\forall w \in W: \quad \inf_{w_h \in W_h} \|w - w_h\| \leqslant \varepsilon(w, h),$$

где $\varepsilon(w, h)$ – оценка ошибки интерполяции элемента w функцией $w_h \in W_h$, $\varepsilon(w, h) \to 0$ при увеличении размерности пространства W_h (или при стремлении параметра дискретизации h к нулю). Последовательность пространств $\{W_h\}$ при этом называется *предельно плотной* в W ([12]).

В соответствии с леммой Сеа ([13], с.109) ошибка приближенного решения оценивается сверху величиной ошибки наилучшего приближения решения элементом пространства W_h,

$$\|u - u_h\| \leqslant C \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\| \leqslant C\varepsilon(u, h),$$

где u_h – приближенное решение задачи. Таким образом, оценка ошибки приближенного решения сводится к оценке ошибки интерполяции произвольной функции из W элементами пространства W_h. Отсюда вытекает одно из основных требований к базисным функциям – они должны обладать аппроксимирующими свойствами.

Именно это свойство и не будет выполняться, если пытаться использовать для исследования МКСЭ рассмотренную процедуру непосредствено. В самом деле, в МКСЭ базисные функции не задаются, а рассчитываются как точные решения задачи. По-этому в общем случае они не будут обладать какими-либо аппроксимирующими свойствами и для них величина $\varepsilon(w, h)$ уже не будет стремиться к нулю для произвольного $w \in W$.

Отметим, что в некоторых частных случаях суперэлементные базисные функции будут обладать аппроксимирующими свойствами. Например, так будет при решении с помощью МКСЭ уравнения Лапласа или Пуассона, если суперэлементы будут квадратами, а решение на их ребрах будет интерполироваться кусочно-линейным образом. Тогда суперэлементные базисные функции будут обычными билинейными функциями, которые используются и в обычном методе конечных элементов.

но, обратим внимание на то, что при построении аппроксимаций МКСЭ по существу задаются не сами базисные функции (они, как уже было сказано, рассчитываются специальным образом), а следы этих функций на границах суперэлементов, т.е. некоторые граничные базисные функции. Так, в указанных выше работах Р.П. Федоренко ([1]-[4]) для квадратных суперэлементов использовалась кусочно-линейная интерполяция (по четырем узлам на границе суперэлемента) и кусочно-квадратичная интерполяция (по восьми узлам на границе – углам квадрата и средним точкам его ребер). Эти граничные базисные функции уже обладают аппроксимирующими свойствами в пространстве функций, заданных на границе. Если записать задачу относительно этих, граничных, функций, исключив из рассмотрения «внутренности» суперэлементов, то к ней уже можно применить терию абстрактных вариационных уравнений и проекционных методов. При этом ошибка приближенного решения будет определяться ошибкой интерполяции произвольной функции, заданной на границе суперэлементов, элементами соответствующего конечномерного пространства функций, также заданных на границе. Именно этот подход используется в данной и предыдущих работах авторов ([8]-[11]).

Таким образом, схема подхода имеет следующий вид. Исходная задача заменяется эквивалентной ей задачей для определения следов решения на границах суперэлементов. Далее к ней применяются стандартные подходы и методы теории абстрактных вариационных уравнений и проекционно-сеточных методов, позволяющие получить оценки ошибок. Основное отличие от традиционного подхода заключается в сведении исходной задачи к задаче определения следов решения на границах суперэлементов с использованием соответствующих операторов и функциональных пространств.

При сведении исходной задачи к задаче для следов используются операторы Пуанкаре-Стеклова. Они были предложены в работах Лебедева

области. При этом методы декомпозиции области рассматриваются как итерационные методы решения соответствующих уравнений для следов. Это позволяет использовать при их исследовании теорию итерационных методов решения абстрактных операторных уравнений. В соответствие с описанным выше подходом метод конечных суперэлементов может рассматриваться как проекционный метод решения этих уравнений.

Рассмотрим теперь комбинированный подход. От двух предыдущих он отличается тем, что в некоторых конечных элементах используются обычные апрроксимирующие базисные функции (как в обычном методе конечных элементов), а в некоторых – суперэлементные базисные функции. При построении оценок приближенного решения в этом случае используется как обычный конечно-элементный подход (в тех подобластях, где используются обычные базисные функции) так и суперэлементный подход (в тех подобластях, где используются суперэлементные базисные функции). Переход от исходной задачи к задаче определения следов осуществляется локально, лишь там, где это необходимо. Соответственно изменятся и пространство, в котором определяется решение, и нормы в нем. Подробно об этом написано ниже, в основном тексте работы.

Подчеркнем еще раз, что сведение задачи к задаче для следов для МКСЭ или комбинированного подхода необходимо лишь для теоретического исследования метода. Это позволяет использовать при обосновании этих методов готовую и хорошо разработанную теорию. С точки зрения алгоритма построения конечномерной задачи (СЛАУ) эти методы сходны с обычным методом конечных элементов.

Суммируя вышесказанное, подчеркнем еще раз отличия метода конечных элементов и метода конечных суперэлементов.

1. При построении аппроксимаций МКЭ задача записывается как вариационное уравнение относительно искомой функции. Его решение – слабое (обобщенное) решение исходной задачи.

2. Разбиение области на конечные элементы производится на этапе построения аппроксимаций МКЭ для данной задачи, после этапа постановки дифференциальной задачи.

3. Параметр дискретизации в данном случае – шаг h пространственной конечно-элементной сетки, заданной в расчетной области. Приближенное решение сходится к точному в соответствующей норме при $h \to 0$.

4. Базисные функции, построенные на этой сетке, должны обладать соответствующими аппроксимирующими свойствами (свойством полноты) при $h \to 0$.

5. Диаметр конечных элементов стремится к нулю, когда шаг h сетки стремится к нулю.

Метод конечных суперэлементов

1. При построении аппроксимаций МКСЭ задача записывается как вариационное уравнение относительно следов искомой функции на границах суперэлементов. Его решение – следы решения исходной задачи на границах суперэлементов.

2. Разбиение области на суперэлементы производится на этапе построения указанной слабой постановки. Суперэлементная сетка не является «разностной» в обычном смысле этого слова. Это просто разбиение области на меньшие подобласти. Размеры суперэлементов не меняются при стремлении параметра дискретизации к нулю.

сетка, заданная на границах подобластей-суперэлементов. Шаг h этой сетки является параметром дискретизации. Приближенное решение задачи сходится к точному, когда $h \to 0$.

4. Базисные функции, заданные на граничной сетке, должны обладать аппроксимирующими свойствами. «Суперэлементные» базисные функции рассчитываются как точные решения исходной задачи с граничными базисными функциями в качестве граничных условий. Они могут не обладать какими-либо аппроксимирующими свойствами.

5. Диаметр суперэлементов никак не зависит от шага h разностной сетки и не меняется при $h \to 0$.

Комбинированный подход

1. При построении аппроксимаций задача записывается как вариационное уравнение относительно двух функций. Первая из них – след решения задачи на границе суперэлементов, вторая – решение в части области, не занятой суперэлементами.

2. Разбиение области на суперэлементы производится на этапе построения указанной слабой постановки. Суперэлементная сетка не является «разностной» в обычном смысле этого слова. Это просто разбиение области на меньшие подобласти. Размеры суперэлементов не меняются при стремлении параметра дискретизации к нулю. В отличие от МКСЭ суперэлементы занимают не всю расчетную область, а лишь ее часть.

3. Для аппроксимации задачи используется пространственная конечно-элементная сетка, заданная в части расчетной области, не занятой суперэлементами. Для аппроксимации решения на границе суперэлемента используется ограничение указанной сетки на границу

дискретизации. Приближенное решение задачи сходится к точному, когда $h \to 0$. При этом к нулю стремится как шаг пространственной сетки, так и шаг граничной сетки на границе суперэлемента.

4. Базисные функции, заданные на пространственной конечноэлементной сетке, должны обладать аппроксимирующими свойствами. Базисные функции на граничной сетке получаются как ограничение базисных функций внутри области на границу суперэлемента. «Суперэлементные» базисные функции рассчитываются как точные решения исходной задачи с граничными базисными функциями в качестве граничных условий. Они могут не обладать какими-либо аппроксимирующими свойствами.

5. Диаметр суперэлементов никак не зависит от шага h разностной сетки и не меняется при $h \to 0$.

Разницу в подходах также иллюстрируют Рис. 1-2. На Рис. 1 показано разбиение квадратной области на четыре конечных элемента (слева), четыре конечных суперэлемента (в центре) и на один суперэлемент и 3 конечных элемента (справа). При этом размеры конечных элементов и конечных суперэлементов одинаковы и равны $h = H$. Сетки совпадают.

На Рис. 2 показано разбиение той же области на конечные элементы и конечные суперэлементы, когда шаг разностной сетки в два раза меньше, чем на предыдущем рисунке, $h = H/2$. Шаг сетки опять одинаков, но геометрия сеток стала различной. На левой, конечноэлементной, сетке аппроксимируются функции, заданные во всей двумерной области. На центральной, суперэлементной, аппроксимируются функции, заданные на границах суперэлементов. Граничная сетка стала в два раза более мелкой, размер суперэлементов не изменился и по-прежнему равен H. На правой сетке (для комбинированного подхода) произошло измельчение сетки в части области, не занятой суперэлементом. Суперэлемент

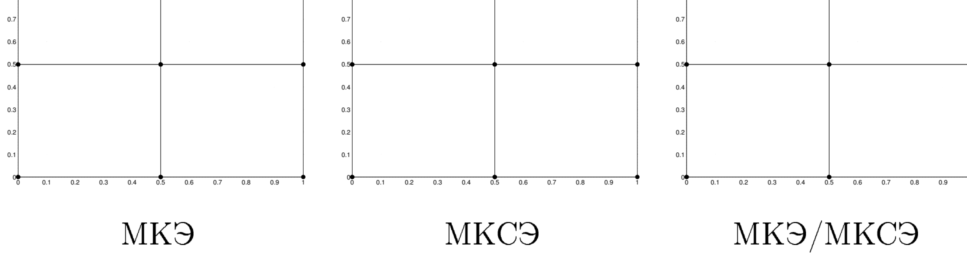


Рис. 1. Расчетная сетка, $h = H$.

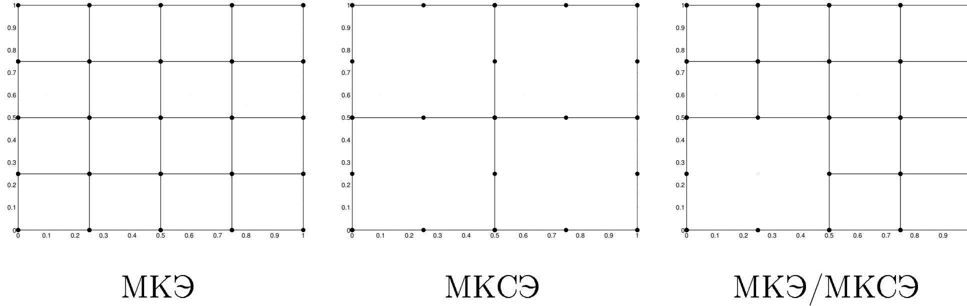


Рис. 2. Расчетная сетка, $h = H/2$.

расположен в левом нижнем углу области. Его размер не изменился, изменилась лишь сетка на его границе, которая стала в два раза мельче.

Данная работа посвящена исследованию описанного выше комбинированного подхода. В ней построена слабая постановка задачи и указан способ ее аппроксимации, который приводит к данному численному методу, исследованы ее свойства, получены оценки ошибок метода. Как и ранее, задача записывается в такой форме, что для ее исследования становится возможным применять хорошо разработанные теории вариационных уравнений и проекционно-сеточных методов. В целом в своей «доказательной части» данная работа следует работе ([10]). В ней используется сходный подход при построении и исследовании слабой постановки и построении конечномерной задачи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00461).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – открытая область, $\partial\Omega$ – ее граница, $L_2(\Omega)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом в области Ω, $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ – пространство Соболева функций, имеющих в области Ω суммируемые с квадратом первые производные, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$, $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ – пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $W_2^1(\Omega)$, $W_2^{-1/2}(\partial\Omega) = \left(W_2^{1/2}(\partial\Omega)\right)'$, $W_2^{-1}(\Omega) = \left(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)'$, $(\cdot,\cdot)_\Omega$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ или отношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $W_2^{-1}(\Omega)$, порожденное скалярным произведением в $L_2(\Omega)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$ – скалярное произведение в $L_2(\partial\Omega)$ или отношение двойственности между $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ и $W_2^{-1/2}(\partial\Omega)$, порожденное скалярным произведением в $L_2(\partial\Omega)$. Для какого-либо пространства F через F' будем обозначать двойственное к нему пространство. Через $\{x, y, \ldots\}$ будем обозначать элемент прямого произведения $X \times Y \times \cdots$.

3 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\textit{определить } u \in W_2^1(\Omega, -\Delta): \quad -\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$f \in L_2(\Omega), \quad W_2^1(\Omega, -\Delta) = \left\{u : u \in W_2^1(\Omega),\ -\Delta u \in L_2(\Omega)\right\}.$$

Будем предполагать, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – открытая односвязная область.

4.1 Формула Грина

Основным средством построения и исследования обобщенных постановок краевых задач является формула Грина в пространстве $W_2^1(\Omega)$, которая является следствием абстрактной формулы Грина ([18], с.188) и формулируется следующим образом: существует единственный оператор $\delta : W_2^1(\Omega, -\Delta) \to W_2^{-1/2}(\partial\Omega)$, такой, что

$$a(u,v) = (-\Delta u, v)_\Omega + \langle \delta u, \gamma v \rangle_{\partial\Omega}\,, \qquad \forall u \in W_2^1(\Omega, -\Delta),\ v \in W_2^1(\Omega),$$

$$W_2^1(\Omega, -\Delta) = \big\{ u \in W_2^1(\Omega) :\ -\Delta u \in L_2(\Omega) \big\},$$
$$a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega.$$

Здесь $\gamma : W_2^1(\Omega) \to W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ – оператор вычисления следа, $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$.

Если $u \in W_2^2(\Omega)$ и граница $\partial\Omega$ области Ω такова, что имеет почти всюду внешнюю нормаль $\vec{n}$, то

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \quad \langle \delta u, \gamma v \rangle_{\partial\Omega} = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, v \, d\gamma.$$

4.2 Классическая слабая постановка

Классическая слабая постановка краевой задачи (1)–(2) имеет следующий вид ([18]):

определить $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega); \quad f \in L_2(\Omega). \quad (3)$$

Известно, ([18], глава 6), что задачи (1)-(2) и (3)) эквивалентны.

Постановка (3) будет иметь смысл и при $f \in W_2^{-1}(\Omega)$, но в этом случае она уже не будет эквивалентна постановке (1)-(2).

Предположим, что область $\overline{\Omega}$ можно представить в виде объединения двух подобластей Ω_f и Ω_s

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_f \cup \overline{\Omega}_s,$$

причем область Ω_s является строго внутренней подобластью области Ω, $\overline{\Omega}_s \subset \Omega$. Область Ω_s будем называть суперэлементом. Для простоты будем рассматривать только один суперэлемент, хотя это не принципиально.

Пусть Γ_s – граница суперэлемента Ω_s, $\Gamma_s = \partial\Omega_s$. Для простоты будем считать, что граница Γ_s области Ω_s является односвязной.

Граница Γ_f области Ω_f в этом случае будет иметь две компоненты связности,

$$\Gamma_f = \Gamma_\Omega \cup \Gamma_s,$$

где $\Gamma_\Omega = \partial\Omega$ – внешняя часть границы области Ω_f.

Мы будем считать, что границы всех рассматриваемых областей являются многоугольниками, хотя это и не обязательно.

Пример разбиения области приведен на Рис. 3.

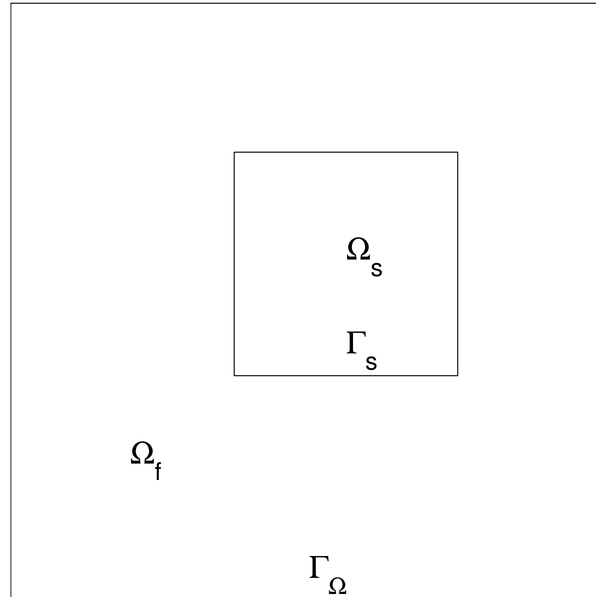


Рис. 3. Область и суперэлемент.

никами, то на их границе почти всюду существует внешняя нормаль.

На этом этапе уже появляются различия данного подхода и «обычного» МКСЭ. В отличие от МКСЭ здесь суперэлементы не покрывают всю расчетную область. Единственный суперэлемент Ω_s является просто некоторой внутренней подобластью полной расчетной области Ω.

Определим пространство W следующим образом:

$$W = W_2^1(\Omega_f) \times W_2^1(\Omega_s).$$

Элемент $v \in W$ представляет собой набор из 2-х функций v_f и v_s, $v = \{v_f, v_s\}$, причем $v_f \in W_2^1(\Omega_f)$, $v_s \in W_2^1(\Omega_s)$.

Произвольную функцию $u \in W_2^1(\Omega)(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ можно рассматривать как элемент пространства W (W_0), если положить $u = \{u_f, u_s\}$, $u_{f,s} = u|_{\Omega_{f,s}}$.

Также будем рассматривать пространство W_0,

$$W_0 = W_{2,0}^1(\Omega_f) \times W_2^1(\Omega_s).$$

Здесь $W_{2,0}^1(\Omega_f)$ – подпространство пространства $W_2^1(\Omega_f)$, состоящее из функций, которые обращаются в 0 на внешней границе области Ω_f, т.е. на Γ_Ω.

Справедливо следующее утверждение

Лемма 4.1. *Функция $v \in W$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда*

$$\langle v_f, \mu_f \rangle_{\partial\Omega_f} + \langle v_s, \mu_s \rangle_{\partial\Omega_s} = 0, \quad \forall \mu \in M, \tag{4}$$

где

$$M = \Big\{ \mu = \{\mu_f, \mu_s\} \in W_2^{-1/2}(\partial\Omega_f) \times W_2^{-1/2}(\partial\Omega_f) : \\ \exists\, \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ \mu_{f,s} = \vec{\psi} \cdot \vec{n}_{f,s} \Big\},$$

$\vec{n}_{f,s}$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega_f$ или $\partial\Omega_s$ соответственно.

денного в ([10]). Условие (4) представляет собой слабую форму условия непрерывности функции v на общей границе подобластей Ω_f и Ω_s.

Рассмотрим слабую постановку (3) задачи (1)-(2). Можно показать, что она эквивалентна следующей модифицированной слабой постановке:

$$\text{\textit{определить}} \quad u = \{u_f, u_s\} \in W_0 = W^1_{2,0}(\Omega_f) \times W^1_2(\Omega_s): \tag{5}$$

$$\langle u_f, \mu_f \rangle_{\partial\Omega_f} + \langle u_s, \mu_s \rangle_{\partial\Omega_s} = 0, \quad \forall \mu \in M, \tag{6}$$

$$a_s(u_s, v_s) = (f_s, v_s)_{\Omega_s}, \quad \forall v_s \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega_s), \tag{7}$$

$$a_f(u_f, v_f) + \langle \delta_s u_s, \gamma_s v_s \rangle_{\partial\Omega_s} = (f_f, v_f)_{\Omega_f}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega). \tag{8}$$

Здесь

$$a_{f,s}(u,v) = \int\limits_{\Omega_{f,s}} \nabla u \nabla v d\Omega_{f,s}, \quad u, v \in W^1_2(\Omega_{f,s}),$$

$$f_{f,s} = f|_{\Omega_{f,s}} \in L_2(\Omega_{f,s}), \quad (f_{f,s}, v_{f,s})_{\Omega_{f,s}} = \int\limits_{\Omega_{f,s}} f v d\Omega_{f,s}.$$

Здесь γ_s – оператор вычисления следа на границе $\partial\Omega_s$ области Ω_s.

Доказательство этого утверждения сходно с доказательством аналогичного утверждения в ([10]).

Поясним смысл условий (5)–(8). Условие (5) подчиняет u главным граничным условиям (2) и обеспечивает необходимую гладкость u в подобластях Ω_f и Ω_s, что оправдывает возможность использования в них формулы Грина. Отметим, что для произвольных элементов пространств W и W_0 формулу Грина в области Ω использовать нельзя, т.к. произвольный элемент этих пространств может не обладать суммируемым с квадратом обобщенным градиентом во всей области Ω, хотя он всегда имеет суммируемый с квадратом обобщенный градиент в каждой из областей Ω_f, Ω_s.

Гладкость u во всей области Ω (т.е. принадлежность u пространству $W^1_2(\Omega)$) обеспечивает условие (6). Для элементов W или W_0, подчинен-

но.

Выполнение условий (7) эквивалентно тому, что функция $u_s \in W_2^1(\Omega_s)$ является слабым решением уравнения (1) в области Ω_s. Т.к. в этом условии $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_s)$, то соотношение (7) не накладывают на u_s никаких граничных условий (другими словами, любая функция u_s, являющаяся слабым решением уравнения (но не краевой задачи) (1), будет удовлетворять соотношениям (7)).

Условие (8) замыкает систему этих соотношений. Оно является следствием исходной слабой постановки, соотношения (7) и формулы Грина для области Ω_s.

Отметим отличие данного утверждения от аналогичного утверждения для МКСЭ. В уравнении (8) содержится слагаемое вида $a_f(u_f, v_f)$, которого нет в случае МКСЭ. Это связано с тем, что в МКСЭ суперэлементы покрывают всю расчетную область. После применения в каждом из суперэлементов формулы Грина при переходе к рассмотрению следов решения и нормальных производных на границах суперэлементов интегралы по внутренним частям суперэлементов пропадают. Здесь же переход к следам с помощью формулы Грина осуществляется лишь в одной подобласти – суперэлемента Ω_s. Интегралы по оставшейся части области $\Omega_f = \Omega \setminus \Omega_s$ остаются.

5 Построение вариационного уравнения $b(u, v) = f(v)$ в пространстве следов

5.1 Операторы и их свойства

Введем оператор $G : W_2^{1/2}(\partial\Omega) \to W_2^1(\Omega)$, сопоставляющий функции $\varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ функцию $u = G\varphi \in W_2^1(\Omega)$, которая является решением

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad \varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega),$$
$$a(u,v) = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{9}$$

Известно, что G – линейный непрерывный оператор, т.е.

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \qquad G(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 G(\varphi_1) + c_2 G(\varphi_2),$$
$$\|G\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} \le C \, \|\varphi\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)},$$

где константа $C > 0$ не зависит от φ.

Используя формулу Грина, из (9) получим:

$$a(u,v) = \langle \delta u, \gamma v \rangle_{\partial\Omega}, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega),$$

или, учитывая, что $u = G\varphi$:

$$a(G\varphi, v) = \langle \delta G\varphi, \gamma v \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad \forall \varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega).$$

Если решение $u = G\varphi \in W_2^2(\Omega)$, то $\delta u = \partial u / \partial \vec{n}$ и

$$a(G\varphi, v) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G\varphi}{\partial \vec{n}} v \, dl, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad \forall \varphi \in W_2^{1/2}(\partial\Omega).$$

Введем в рассмотрение оператор $P : W_2^{1/2}(\partial\Omega) \to W_2^{-1/2}(\partial\Omega)$ (оператор Пуанкаре–Стеклова), определенный следующим образом:

$$P\varphi = \delta G\varphi.$$

Если решение $u = G\varphi \in W_2^2(\Omega)$, то

$$P\varphi = \frac{\partial G\varphi}{\partial \vec{n}}.$$

В дальнейшем всегда будет использоваться обозначение $\partial(\cdot)/\partial\vec{n}$, даже если нормальная производная не существует в классическом смысле.

Укажем некоторые свойства операторов P и G:

1. Оператор P является линейным и непрерывным.

$$a(G\varphi, v) = \langle P\varphi, \gamma v \rangle_{\partial\Omega} \,. \tag{10}$$

3. Т.к. (10) верно для $\forall v \in W_2^1(\Omega)$, то оно будет верно для $v = G\psi$, где $\psi \in W_2^{1/2}(\Omega)$. Тогда, учитывая симметричность $a(u,v)$, получим:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in W_2^{1/2}(\partial\Omega): \quad \langle P\varphi_1, \varphi_2 \rangle = a(G\varphi_1, G\varphi_2) = \\ = a(G\varphi_2, G\varphi_1) = \langle \varphi_1, P\varphi_2 \rangle \,,$$

т.е. оператор P является симметричным.

5.2 Построение вариационного уравнения I

Рассмотрим построенную выше систему соотношений (5)-(8). Представим функцию u в виде $u = w + U$, $u_{f,s} = w_{f,s} + U_{f,s}$ где $w = \{w_f, w_s\} \in W$ – такая функция, что

$$-\Delta w_s = f_s \quad \text{в}\, \Omega_s, \quad w_s|_{\partial\Omega_s} = 0,$$
$$w_f = 0 \text{ в } \Omega_f.$$

Построенная таким образом функция w_s будет принадлежать пространству $W_2^1(\Omega_s)$ и являться в подобласти Ω_s решением исходного уравнения. Смысл представления функции w в таком виде – свести задачу (7) к задаче с нулевой правой частью.

Отметим, что функция $w = \{w_f, w_s\}$ в этом случае будет непрерывной на Γ_s и будет принадлежать пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Подставив $u = w + U$ в соотношения (5)-(8), получим уравнения для $U = \{U_f, U_s\}$:

$$\textit{определить} \quad U = \{U_f, U_s\} \in W_0 = W_{2,0}^1(\Omega_f) \times W_2^1(\Omega_s): \tag{11}$$

$$\langle U_f, \eta_f \rangle_{\partial\Omega_f} + \langle U_s, \eta_s \rangle_{\partial\Omega_s} = 0, \quad \forall \eta \in M, \tag{12}$$

$$a_s(U_s, v_s) = 0, \quad \forall v_s \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_s), \tag{13}$$

$$(f_f, v_f)_{\Omega_f} - \langle \delta_s w_s, \gamma_s v_s \rangle_{\partial\Omega_s}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \quad (14)$$

Используя операторы P и G для области Ω_s , перепишем соотношения (12)-(14) в виде:

$$\langle U_f, \eta_s \rangle_{\partial\Omega_f} + \langle \varphi_s, \eta_s \rangle_{\partial\Omega_s} = 0, \quad \forall \mu \in M, \quad (15)$$

$$U_s = G_s \varphi_s, \quad (16)$$

$$a_f(U_f, v_f) + \langle P_s \mu_s, \gamma_s v_s \rangle_{\partial\Omega_s} =$$

$$(f_f, v_f)_{\Omega_f} - \langle \delta_s w_s, \gamma_s v_s \rangle_{\partial\Omega_s}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \quad (17)$$

Здесь $\mu_s = \gamma_s U_s$ – след функции U_s на $\Gamma_s = \partial\Omega_s$, P_s, G_s – операторы P и G, соответствующие подобласти Ω_s.

Таким образом, формально задача может решаться в два этапа:

1. По соотношениям (15), (17) определяем пару функций $\{U_f, \mu_s\}$, где U_f – решение задачи в области Ω_f, φ_s – след на Γ_s решения U_s задачи в области Ω_s.

   Отметим, что в силу (15) $\mu_s = U_f|_{\Gamma_s}$. Таким образом, хотя формально задача и записана относительно двух неизвестных – $\{U_f, \mu_s\}$, второе из них является просто ограничением первого неизвестного на границу суперэлемента. Тем не менее, мы будем рассматривать задачу именно в таком виде, т.к. при построении аппркосимаций условие (15), вообще говоря, может не выполняться точно, а аппроксимироваться так же, как соотношения (16) и (17).

2. По известной функции μ_s согласно (16) восстанавливаем решение U_s в подобласти Ω_s, решая в Ω_s соответствующую краевую задачу (т.е. вычисляем значение оператора G_s на функции μ_s, $U_s = G_s \mu_s$).

Для уравнения (17) справедливы те же замечания, что и для уравнения (8) в разделе 4.3 – переход к следам решения и операторам Пуанкаре-Стеклова осуществляется лишь на границе суперэлемента Ω_s, который

шейся части области соответствует интеграл вида $a_f(U_f, v_f)$. Переход к следам решения здесь не происходит.

5.3 Построение вариационного уравнения II

Рассмотрим гильбертово пространство H, определенное следующим образом:

$$H = L_2(\Omega_f) \times L_2(\partial\Omega_s),$$

где $L_2(\Omega_f)$ ($L_2(\partial\Omega_s)$) – пространство суммируемых с квадратом функций на Ω_f ($\partial\Omega_s$). Элемент x пространства H – упорядоченная пара функций, $x = \{u, \mu\}$, где $u \in L_2(\Omega_f)$, $\mu \in L_2(\partial\Omega_s)$.

Скалярное произведение и норму в этих пространствах введем обычным образом:

$$(u, v)_{\Omega_f} = \int\limits_{\Omega_f} uv \, d\Omega_f, \quad \|u\|^2_{\Omega_f} = (u, v)_{\Omega_f},$$

$$\langle \mu, \nu \rangle_{\partial\Omega_s} = \int\limits_{\partial\Omega_s} \mu\nu \, dl, \quad \|\mu\|^2_{\partial\Omega_k} = \langle \mu, \mu \rangle_{\partial\Omega_k}.$$

В пространстве H введем скалярное произведение и норму прямого произведения:

$$(x, y)_H = (u, v)_{\Omega_f} + \langle \mu, \nu \rangle_{\partial\Omega_s}, \quad \|x\|^2_H = (x, x)_H,$$
$$x = \{u, \mu\} \in H, \, y = \{u, \nu\} \in H.$$

Аналогично введем нормированное пространство

$$X = W^1_2(\Omega_f) \times W^{1/2}_2(\partial\Omega_s),$$
$$\|x\|^2_X = \|u\|^2_{W^1_2(\Omega_f)} + \|\mu\|^2_{W^{1/2}_2(\partial\Omega_s)}, \quad x = \{u, \mu\} \in X.$$

В пространстве X рассмотрим подпространство

$$X_0 = \left\{ x = \{u, \mu\} \in X : \quad \exists v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), u = v|_{\Omega_f}, \mu = v|_{\partial\Omega_s} \right\}.$$

ноль на внешней границе области Ω_f и являются непрерывными на $\Gamma_s = \partial\Omega_s$. Для произвольного элемента $x = \{u, \mu\} \in X_0$ $\mu = u|_{\partial\Omega_s}$, т.е. вторая компонента элемента x однозначно определяется первой. Поэтому X_0, как линейное пространство, можно отождествить с пространством $W^1_{2,0}(\Omega_f)$. Но как нормированные пространства они различны.

В качестве пространства, двойственного к X, будем рассматривать пространство

$$X' = W_2^{-1}(\Omega_f) \times W_2^{-1/2}(\partial\Omega_s).$$

Рассмотрим теперь определенные выше линейный оператор $P_s : W_2^{1/2}(\partial\Omega_s) \to W_2^{-1/2}(\partial\Omega_s)$, и билинейную форму

$$b(x, y) = a_f(u, v) + \langle P_s\mu, \nu\rangle_{\partial\Omega_s},$$
$$x = \{u, \mu\} \in X,\ y = \{v, \nu\} \in X,$$

определенную для всех $x, y \in X$.

Лемма 5.1. *Форма $b(\cdot,\cdot)$ является непрерывной симметричной положительно определенной билинейной формой в пространстве X_0, т.е.*

$$\forall x, y \in X_0 :\ |b(x, y)| \le c_1 \|x\|_X \|y\|_X\,; \quad \forall x \in X_0 :\ c_2 \|x\|^2_X \le b(x, x).$$

Доказательство. Симметричность, непрерывность и билинейность формы являются прямым следствием симметричности, непрерывности и линейности операторов Пуанкаре-Стеклова.

Докажем положительную определенность формы $b(\cdot,\cdot)$. Для этого рассмотрим произвольный элемент $x \in X_0$ и проделаем ряд преобразований:

$$\forall x = \{u_f, \mu\} \in X_0 : \quad b(x, x) = a_f(u_f, u_f) + \langle P_s\mu, \mu\rangle_{\partial\Omega_s} =$$
$$a_f(u_f, u_f) + a_s(G_s\mu, G_s\mu) = a_f(u_f, u_f) + a_s(u_s, u_s),$$

где $u_s = G_s\mu$. По построению пространства X_0 элемент $\mu = u|_{\partial\Omega_s}$. Поэтому (Лемма 4.1) функция $u = \{u_f, u_s\} \in W_0$ может рассматриваться

Ω суммируемый с квадратом градиент, и

$$b(x,x) = a(u,u) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, d\Omega.$$

В этом выражении $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Известно, что в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ форма $a(u,v)$ задает (энергетическую) норму, эквивалентную обычной норме пространства $W_2^1(\Omega)$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда получим:

$$b(x,x) \geq C \ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = C \ \left(\|u_f\|^2_{W_2^1(\Omega_f)} + \|u_s\|^2_{W_2^1(\Omega_s)}\right).$$

Для областей с кусочно-гладкой границей справедливо следующее неравенство ([20]):

$$\forall u \in W_2^1(\Omega): \quad \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \geq C_1 \ \|\gamma u\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad C_1 > 0.$$

Напомним, что здесь γ – оператор вычисления следа на $\partial\Omega$.

Продолжив преобразования, получим:

$$b(x,x) \geq C \ \|u_f\|^2_{W_2^1(\Omega_f)} + C_2 \ \|\varphi\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)} = \|x\|^2_{X_0}.$$

Таким образом,

$$b(x,x) \geq C \ \|x\|^2_{X_0}, \quad C > 0.$$

□

Билинейность, непрерывность и положительная определенность формы $b(\cdot,\cdot)$ позволяют сформулировать для нее следующую задачу:

$$\textit{определить } x \in X_0: \quad b(x,y) = F(y), \quad \forall y \in X_0, \tag{18}$$

где $F(\cdot)$ – непрерывный линейный функционал на X, $F \in X'$.

В соотвествии с леммой Лакса-Мильграма ([13]) решение этой задачи существует и единственно.

Наконец, справедлива

$$F(y) = (f_f, v)_{\Omega_f} - \langle \delta_s w_s, \nu \rangle_{\partial\Omega_s},$$
$$F \in X' \subset H, \quad y = \{v, \nu\} \in X,$$

w_s – функция из (15)-(17).

Пусть решение задачи (18) для такого F имеет вид $x = \{u_f, \mu\}$. Тогда решение $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ исходной задачи имеет вид $u = \{u_f, G_s\mu + w_s\}$.

Доказательство сводится к записи соотношений (15)-(17) с использованием введенных обозначений. При этом условие (15) удовлетворяется за счет выбора соответствующего пространства X_0, условие (17) является развернутой записью вариационного уравнения (18).

6 Построение конечномерной задачи

Задачу (18) можно аппроксимировать тем или иным проекционно-сеточным методом. Проекционые методы решения абстрактных операторных уравнений и краевых задач рассмотрены в [12],[19].

Для простоты рассмотрим лишь метод Галеркина-Бубнова, когда пространства базисных и пробных функций совпадают.

Как уже было сказано выше, в силу условия непрерывности решения на границе суперэлемента, X_0, как линейное пространство, можно отождествить с пространством $W^1_{2,0}(\Omega_f)$. Вторая компонента элемента $x = \{u_f, \mu\}$ пространства X_0 однозначно определяется первой, $\mu = u_f|_{\partial\Omega_s}$.

Представление элемента пространства $W^1_{2,0}(\Omega_f)$ в виде элемента пространства X_0 необходимо лишь для доказательства свойств задачи (18) (положительной определенности и непрерывности билинейной формы $b(\cdot,\cdot)$ в соответствующем пространстве).

Поэтому необходимо аппроксимировать лишь компоненту u_f. При

ференциальном случае, определяется как ограничение $u_{f,h}$ на границу $\Gamma_s = \partial\Omega_s$ суперэлемента.

Для аппроксимации задачи (18) выберем некоторое конечномерное подпространство $V_{0,h}$ пространства $W_{2,0}^1(\Omega_f)$, являющееся линейной оболочкой системы функций $\{\varphi_h^{(i)}\}_{i=1}^N \subset W_{2,0}^1(\Omega_f)$.

Приближенное решение задачи (18) будем искать в виде

$$u_{f,h} = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_h^{(i)}. \tag{19}$$

Приближенным решением задачи (18) будем считать решение следующей конечномерной задачи:

$$\textit{определить } u_{f,h} \in X_{0,h}: \quad b(u_{f,h}, \varphi_h) = F(\varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in X_{0,h}. \tag{20}$$

Здесь

$$b(u_{f,h}, \varphi_h) = a_f(u_{f,h}, \varphi_h) + \langle P_s u_{f,h}, \gamma_s \varphi_h \rangle_{\partial\Omega_s}.$$

Выбирая различным образом подпространство $X_{0,h}$, можно получить различные варианты метода.

Расчет во всех случаях будем проводить по следующей схеме:

1. Для каждой функции $\varphi_h^{(i)}$, носитель которой пересекается с $\Gamma = \partial\Omega_s$, вычислим и запомним функции

   $$\Phi_h^{(i)} = G_s \varphi_h^{(i)}$$

   и

   $$\Pi_h^{(i)} = P_s \varphi_h^{(i)} = \partial\Phi_h^{(i)} / \partial n_s.$$

   Для определения функций $\Phi_h^{(i)}$ в подобласти Ω_s необходимо решить краевую задачу с краевым условием, определяемым функцией $\varphi_h^{(i)}|_{\partial\Omega_s}$.

2. Сформировав и решив конечномерную задачу (20), получим приближенное решение $\{u_{f,h}, \mu_h = u_{f,h}|_{\partial\Omega_f}\}$ задачи (18).

вычисленные операторы Грина для граничных базисных функций, т.е. функции $\Phi_i^{(h)}$.

Формально подход эквивалентен обычному МКЭ, если считать, что в области Ω_f базисные функции задаются каким-либо образом, а во внутренность суперэлемента Ω_s они продолжаются как решения исходной задачи.

7 Оценки ошибок

Рассмотрим метод Бубунова-Галеркина, когда системы базисных и пробных функций совпадают.

В этом случае оценка ошибки сводится к оценке величины наилучшего приближения решения φ задачи элементами конечномерного подпространнства $X_{0,h}$.

В соответствии с леммой Сеа ([13], с.109), для ошибки метода справедливо неравенство:

$$\|x - x_h\|_{X_0} \leq M \inf_{y_h \in V_{0,h}} \|x - y_h\|_{X_0}\,, \tag{21}$$

где константа $M > 0$ не зависит от x.

Норму в правой части неравенства (21) оценим следующим образом:

$$\inf_{y_h \in V_{0,h}} \|x - y_h\|_{X_0} \leq \|x - \tilde{x}\|_{X_0}\,,$$

где $\tilde{x} \in X_{0,h}$ – интерполянт решения x, построенный по системе функций $\{\varphi_h^{(i)}\} \subset X_0$.

В нашем случае норма элемента $x \in \{u_f, \mu\} \in X$ имеет вид

$$\|x\|_X^2 = \|u_f\|^2_{W_2^1(\Omega_f)} + \|\mu\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)}\,.$$

Таким образом, требуется оценить величину

$$\|x - \tilde{x}\|_X^2 = \|u_f - \tilde{u}_f\|^2_{W_2^1(\Omega_f)} + \|\mu - \tilde{\mu}\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)}\,.$$

угольной сетке. Также будем считать, что граница области, в которой осуществляется решение задачи, аппроксимируется точно.

Пусть T_j – треугольники триангуляции.

Предположим, что решение исходной задачи $u \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Тогда для первого слагаемого справедлива оценка ([13],[12]):

$$\|u_f - \tilde{u}_f\|^2_{W_2^1(\Omega_f)} \leqslant C\,h,$$

$h = \max_i \operatorname{diam} T_i$, $C \geqslant 0$ не зависит от h, $C = C(\|u_f\|_{W_2^2(\Omega_f)}, \theta_0)$, θ_0 – минимальный угол треугольника в триангуляции.

Оценим теперь $\|\mu - \tilde{\mu}\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)}$. Пусть γ_i – ребра триангуляции, образующие границу $\partial\Omega_s$. В пределах каждого такого ребра $\tilde{\mu}$ – линейная функция. Тогда

$$\|\mu - \tilde{\mu}\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)} = \sum_i \|\mu - \tilde{\mu}\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)}.$$

Можно показать ([10]), что если $\mu \in C_0^1(\gamma_i) \cap W_2^{1/2}(\gamma_i)$, то

$$\|\mu\|^2_{W_2^{1/2}(\gamma_i)} \leqslant \alpha_i^2 |\gamma_i|^2 \left(\frac{1}{3}|\gamma_i| + 1\right),$$

где $|\gamma_i|$ – длина ребра γ_i, $\alpha_i = \max\limits_{\xi\in\gamma_i} |\mu'(\xi)|$.

Отсюда

$$\|\mu - \tilde{\mu}\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)} \leqslant \sum_i \alpha_i^2 |\gamma_i|^2 \left(\frac{1}{3}|\gamma_i| + 1\right),$$

где $\alpha_i = \max\limits_{\xi\in\gamma_i} |\mu'(\xi) - \tilde{\mu}'(\xi)|$.

Для α_i справедлива следующая оценка ([21], с.35):

$$\alpha_i = \max_{s\in\gamma_i} |\mu' - \tilde{\mu}'| \leqslant \alpha_{2,i}|\gamma_i|, \quad \alpha_{2,i} = \max_{s\in\gamma_i} |\mu''(s)|.$$

Следовательно,

$$\|\mu - \tilde{\mu}\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)} \leqslant \sum_i \alpha_{2,i}^2 |\gamma_i|^4 \left(\frac{1}{3}|\gamma_i| + 1\right).$$

$$\|\mu-\tilde{\mu}\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)} \leqslant \sum_i \alpha^2_{2,i}|\gamma_i|^4\left(\frac{1}{3}|\gamma_i|+1\right) \leqslant$$
$$\alpha_2^2\sum_i|\gamma_i||\gamma_i|^3\left(\frac{1}{3}|\gamma_i|+1\right) \leqslant$$
$$\alpha_2^2 h_\gamma^3\left(\frac{1}{3}h_\gamma+1\right)\sum_i|\gamma_i| = \alpha_2^2 h_\gamma^3\left(\frac{1}{3}h_\gamma+1\right)L,$$

где L – длина $\partial\Omega_s$. Учитывая, что длина ребра треугольника не превосходит его диаметра, окончательно получим

$$\|\mu-\tilde{\mu}\|^2_{W_2^{1/2}(\partial\Omega_s)} \leqslant C\,h^3\left(\frac{1}{3}h+1\right),$$

где $C>0$ не зависит от h.

Окончательно получаем

$$\|x-\tilde{x}\|^2_X \leqslant C_1\,h + C_2 h^3\left(\frac{1}{3}h+1\right).$$

Здесь константы C_1, C_2 не зависят от шага сетки h. Константа C_1 зависит от вторых производных решения и геометрии сетки в области Ω_f, C_2 зависит от вторых производных решения только на границе $\partial\Omega_s$.

Отметим, что вклад этих двух слагаемых в суммарную ошибку может быть различным в различных ситуациях. Он зависит от геометрии суперэлемента и дифференциальных свойств решения в области Ω_f и на границе $\partial\Omega_s$. Общая рекомендация здесь такая же, как и для оригинального МКСЭ – особенности решения (большие градиенты) должны быть сосредоточены внутри суперэлемента Ω_s. Вне него и на его границе решение должно быть достаточно гладкой функцией. Этим можно добиться уменьшения ошибки приближенного решения за счет уменьшения констант C_1 и C_2 при неизменной величине шага h.

8 Примеры расчетов

Рассмотренный комбинированный вариант метода конечных суперэлементов далее применяется для решения задачи о скоростном скин-слое.

шем их здесь коротко.

Математическая постановка задачи о скоростном скин-слое имеет следующий вид: требуется определить функцию $H = H(x, y, t)$, удовлетворяющую в двумерной области Ω уравнению

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \vec{v}\nabla H = \operatorname{div}\left(\frac{1}{4\pi\sigma}\nabla H - \vec{u}H\right) \tag{22}$$

и заданным начальным и граничным условиям.

Задача решается в двумерной области $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_R$, где Ω_R – область, занимаемая направляющей (рельсом), Ω_A – область, занимаемая якорем (Рис. 4).

При этом

$$\vec{v}(x,t) = \vec{u}_a(t), \quad x \in \Omega_A \cup \Omega_R; \quad \vec{u}(x,t) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_R, \\ \vec{u}_a(t), & x \in \Omega_A \end{cases}.$$

Вектор скорости якоря направлен вдоль оси Ox,

$$\vec{u}_a(t) = (u_a(t), 0),$$

где $u_a(t)$ в рассматриваемой двумерной постановке может считаться заданной функцией времени. Конкретный вид функции $u_a(t)$ определяется полной постановкой задачи, включающей в себя уравнения движения якоря.

На части Γ_2 границы расчетной области заданы граничные условия 1 рода, на оставшейся части границы Γ_1 заданы граничные условия 2 рода.

Вид расчетной области приведен на Рис. 4.

Задача сначала аппроксимировалась по времени полностью неявным образом. Затем для определения решения на каждом временном слое использовался метод конечных суперэлементов или его рассматриваемый вариант.

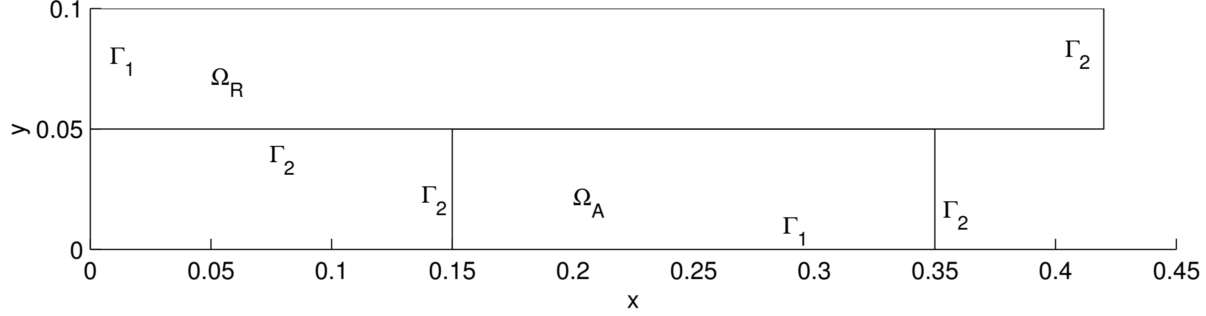


Рис. 4. Расчетная область.

При расчетах использовалась сетка, приведенная на Рис. 5. Для аппроксимации решения в «обычных», квадратных, СЭ использовались обычные билинейные базисные функции.

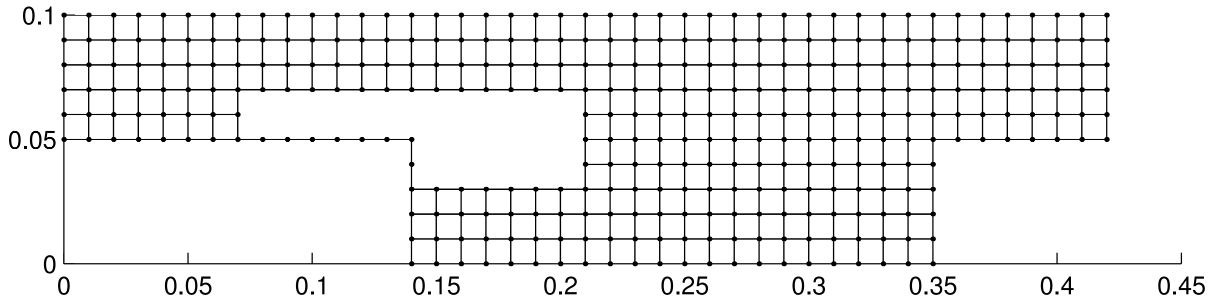


Рис. 5. Расчетная сетка.

На Рис. 6 приведено решение задачи непосредственно рассмотренным методом. Видно, что решение задачи немонотонно. Это связано с наличием в задаче преобладающего конвективного переноса. При этом максимальный по модулю отрицательный минимум решения составляет 0.20% от равномерной нормы решения.

Для устранения этого недостатка численного решения в работе ([11]) рассмотрены различные варианты монотонизации. На Рис. 7 приведено решение задачи при использовании нелинейной искусственной диффузии (подробности алгоритма монотонизации приведены в [11]).

Для сравнения рассмотрим результаты решения той же задачи обычным методом конечных элементов.

На Рис. 8 и Рис. 9 приведены КЭ сетка и КЭ решение той же самой

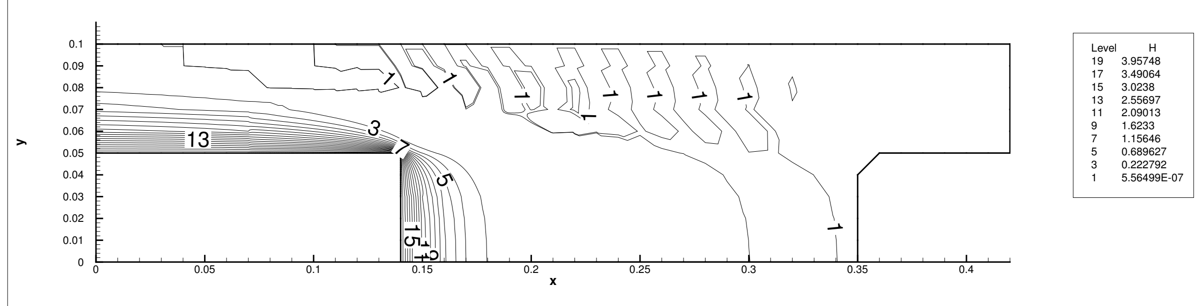


Рис. 6. МКЭ+МКСЭ, искусственная диффузия не используется.

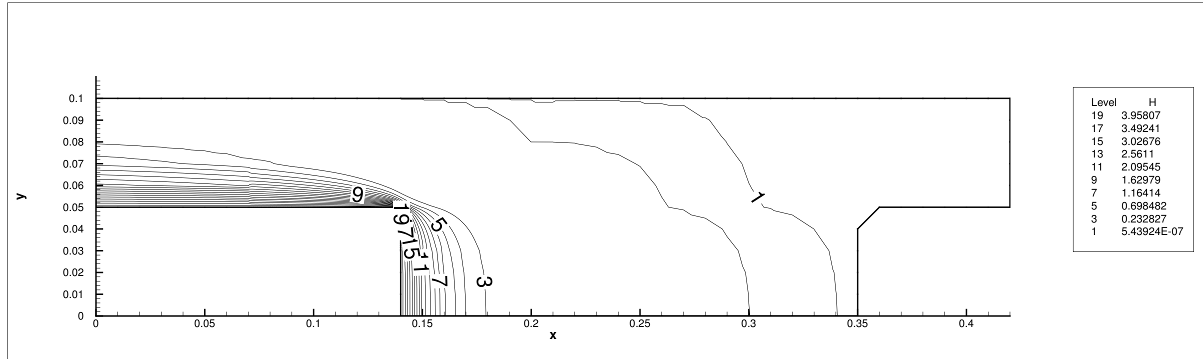


Рис. 7. МКЭ+МКСЭ, нелинейная искусственная диффузия.

задачи. Шаг КЭ сетки такой же, как и для СЭ сетки. КЭ и СЭ сетки отличаются лишь одним, «особым», СЭ, внутри которого сосредоточена особенность решения задачи. КЭ решение сильно немонотонно, максимальный по модулю отрицательный минимум составляет примерно 15% от равномерной нормы решения. Таким образом, одно лишь использование «особого» СЭ приводит к уменьшению нефизических осцилляций почти на два порядка. На Рис. 10 приведено КЭ решение этой задачи с использованием нелинейной искусственной диффузии.

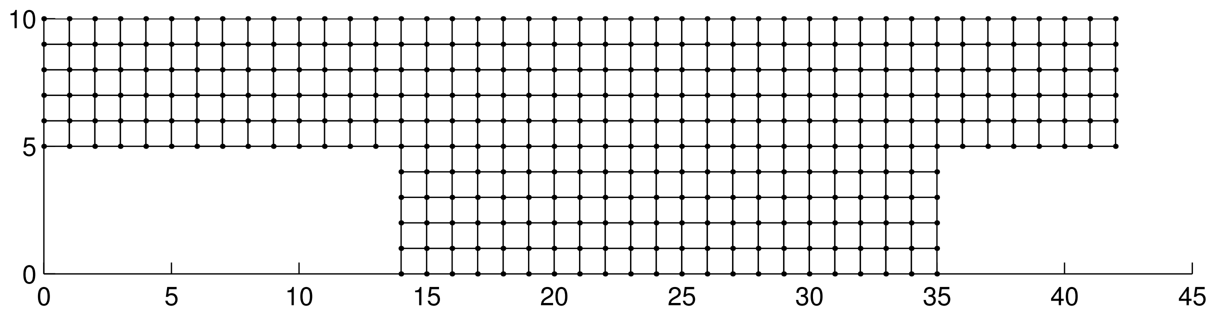


Рис. 8. Расчетная КЭ сетка

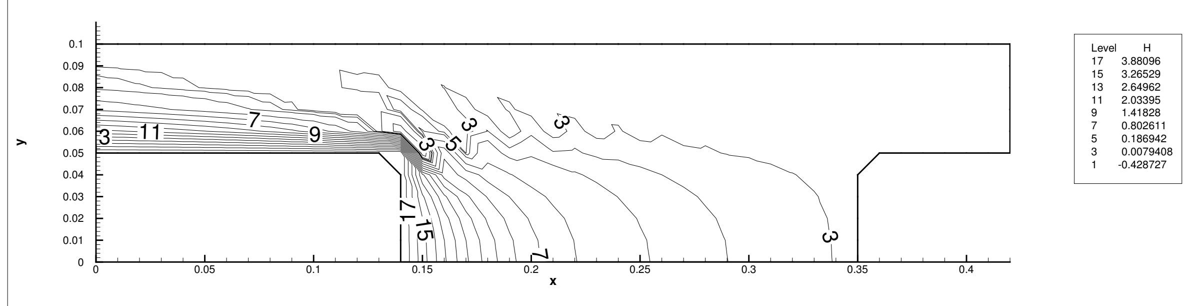


Рис. 9. МКЭ, искусственная диффузия не используется.

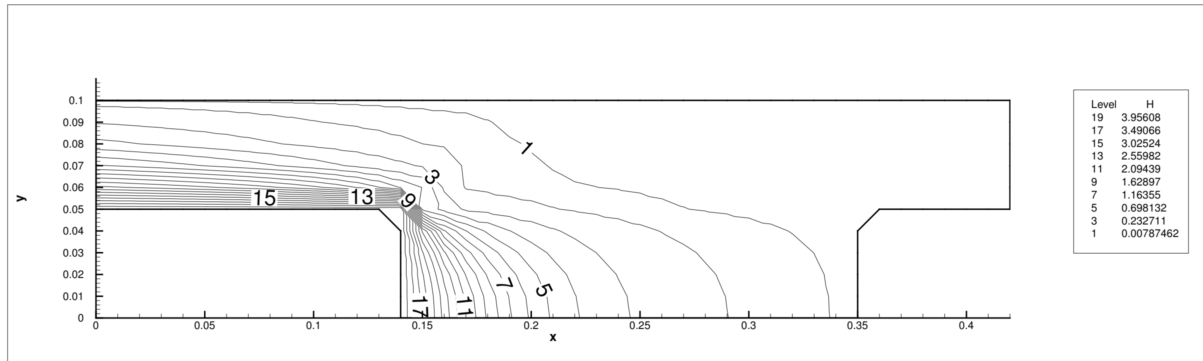


Рис. 10. МКЭ, нелинейная искусственная диффузия.

9 Заключение

В данной работе представлены результаты теоретического и численного исследования алгоритма, основанного на совместном использовании метода конечных элементов и метода конечных суперэлементов. Получены оценки ошибок для одного из вариантов метода для решения уравнения Лапласа. Алгоритм применялся для численного решения задачи о скоростном скин-слое. Для этой задачи проведено сравнение метода с обычным методом конечных элементов. Для рассмотренной задачи метод показал свою эффективность. С одной строны, он позволяет хорошо передать особенности решения, с другой стороны гараздо меньше требователен к вычислительным ресурсам по сравнению с методом конечных суперэлементом.

[1] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Об одном варианте метода конечных элементов // ЖВМиМФ. 1979. Т.19, №4. с. 950-960.

[2] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Расчет диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов // Препринт ИПМ АН СССР, 1987, №171.

[3] *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Расчет напряжений в композитном теле методом конечных суперэлементов // Препринт ИПМ АН СССР, 1994, №97.

[4] *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Издательство МФТИ, 1994. 528 с.

[5] *Репях В.В.* Применение одного варианта метода конечных суперэлементов к решению задач теории упругости // ЖВМиМФ. 1986. Т.26. №11. с. 1643-1653.

[6] *Репях В.В.* Анализ ошибок метода приближенных суперэлементов// ЖВМиМФ. 1989. Т.30. №7. с. 963-983

[7] *Жуков В.Т, Новикова Н.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б.* Метод конечных элементов в задачах конвекции-диффузии. // Препринт ИПМ РАН, 2001, №8.

[8] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* О связи метода конечных суперэлементов Федоренко и проекционно-сеточных методов // Препринт ИПМ РАН, 2001, № 67.

[9] *Galanin M., Savenkov E.*, Fedorenko finite superelement method as special Galerkin approximation// Mathematical Modelling and Analysis, 2002, V.7, №1, pp. 41-50

[10] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* К обоснованию метода конечных суперэлементов Федоренко // ЖВМиМФ, 2003, т.63, №5, с. 711-727.

задачи о скоростном скин-слое, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2004 г. В печати.

[12] *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

[13] *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.:Мир, 1980. 512 с.

[14] *Агошков В.И., Лебедев В.И.* Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // Вычислительные процессы и системы. Т.2. М.: Наука, 1985.

[15] *Агошков В.И.* Методы разделения области в задачах математической физики // Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в задачах математической физики. М.: ОВМ АН СССР, 1989.

[16] *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. М.: ОВМ АН СССР, 1983.

[17] *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2000. 296 с.

[18] *Обэн, Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 384 с.

[19] *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

[20] *Яковлев Г.Н.* О следах функция из W_p^l на кусочно-гладких поверхностях. // Матем. сборник. 1967. V.74(116). №4. с. 526-543

[21] *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. М.: Наука, 1994. 336 с.